

문제 1

$$(a): P_1 = 10 \text{ atm}, T_1 = 300 \text{ K}, n = 1, P_2 = 5 \text{ atm}, T_2 = 300 \text{ K}$$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = 2.46 \text{ L}, \quad V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = 4.92 \text{ L}$$

in isothermal process,

$$q = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 8.314 \times 300 \times \ln\left(\frac{4.92}{2.46}\right) \approx \underline{5.76 \text{ (J/K)}}$$

(b):

$$\therefore \Delta S = \frac{q}{T} = 0$$

($\because$ in adiabatic, $q=0$)

$$(c): V_1 = V_2 = 2.46 \text{ L}, P_2 = 5 \text{ atm or } 0.523, T_2 = 150 \text{ K or } 0.5$$

$$\therefore \Delta S = \frac{q_r}{T} = \int n \frac{C_v}{T} \cdot dT = 1.5R \times \ln\left(\frac{150}{300}\right)$$

$$\approx \underline{-8.64 \text{ (J/K)}}$$

문제 2번

(a): $T_1 = 300\text{K}$, $P_1 = 10\text{atm}$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = 2.46\text{L}, \quad V_2 = 3V_1 = 7.38\text{L}$$

$$T_2 = 300\text{K}, \quad P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = 3.33\text{atm}$$

in isothermal process, $\Delta U = 0$

$$\Delta U = q - w = 0 \quad \rightarrow \quad q = w \text{ 이다.}$$

이때, 과외 과정에 가해지는 일을 하지 않으므로, $w = 0 \rightarrow q = 0$

$$\underline{\Delta H = \Delta U + w = 0}$$

$$dU = T \cdot ds - P dV = 0 \quad \rightarrow \quad ds = \frac{P \cdot dV}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{RT}{V} \cdot dV$$

($\because n=1$)

$$\therefore \Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{R}{V} dV = R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 8.314 \times \ln(3)$$

$$\approx \underline{9.13 \text{ (J/K)}}$$

$$(b): V_2 = V_3 = 7.38 \text{ L}, T_3 = 400 \text{ K}, P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = 4.44 \text{ atm}$$

in constant volume,

$$\Delta U = q_v = \int C_v \cdot dT = 1.5R \times 100 = \underline{1249 \text{ J}}$$

$$W = p \cdot \Delta V = \underline{0}$$

$$\Delta H = \int C_p \cdot dT = 2.5R \times 100 = \underline{2049 \text{ J}}$$

$$\Delta S = \frac{q_v}{T} = 1.5R \ln\left(\frac{400}{300}\right) \approx \underline{3.59 \text{ (J/K)}}$$

$$(c): T_3 = T_4 = 400 \text{ K}$$

$$V_4 = 3V_3 = 22.14 \text{ L}, P_4 = \frac{nRT_4}{V_4} = 1.48 \text{ atm}$$

in isothermal process,

$$\Delta U = 0, \Delta H = 0$$

$$q = w = \int p \cdot dV = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{22.14}{7.38}\right) \approx 3653 \text{ J}$$

$$\Delta S = \frac{q}{T} \approx \underline{9.13 \text{ (J/K)}}$$

$$(d): T_5 = 300K, T_4 = 400K, P_5 = 1.48 \text{ atm} = P_4$$

$$V_5 = \frac{nRT_5}{P_5} = 16.6 \text{ L}$$

$$q = \int C_p \cdot dT = 2.5R \times (-100) = \underline{-2079 \text{ J}}$$

$$w = p \cdot \Delta V = 1.48 \times (16.6 - 22.14) \times \underbrace{(101.325)}_{\substack{\downarrow \\ \text{단위를 J로 변환}}} = \underline{-83 \text{ J}}$$

$$\Delta U = q_p = \underline{-2079 \text{ J}}$$

$$\Delta S = \int \frac{C_p}{T} \cdot dT = 2.5R \times \ln\left(\frac{300}{400}\right) = \underline{-5.98 \text{ (J/K)}}$$

Conclusion, in total,

$$\Delta U = 0, \Delta H = 0$$

$$q = 2821 \text{ J}, w = 2822 \text{ J}, \Delta S = 15.87 \text{ (J/K)}$$

문제 3번

(a):

Assume that, $(x-2)^2 + (y-2)^2 + 4 = f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-2) = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-2) = f_y \quad \text{이다,}$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 2 \quad \text{이다.}$$

이때, $f_x = f_y = 0$ 이 되는 point는 $(2, 2)$ 이다.

$\therefore (2, 2)$ is critical point

$$\text{이때, } D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \times 2 - 0 = 4 > 0$$

또, $(x, y) = (2, 2)$ 일때의 $D > 0$ 이다

$f(2, 2) = 4$ 가 minimum value라 된다.

$$(b): x+y=1 \rightarrow 1-x=y$$

$$\therefore z = (x-2)^2 + (-x-1)^2 + 4$$

$$= x^2 - 4x + 4 + x^2 + 2x + 5$$

$$= 2x^2 - 2x + 9 = 2(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + 9$$

$$= 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{17}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \text{ 일때, 최솟값 } z = \frac{17}{2} \text{ 을 가진다.}$$

$$(c): z = f(x, y), \quad x+y-1 = g(x, y) \text{ 라 하면,}$$

$$\nabla f = \langle 2(x-2), 2(y-2) \rangle, \quad \nabla g = \langle 1, 1 \rangle$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \text{ 을 만족하므로, 이를 만족하는 point를 } (a, b) \text{ 라 하면,}$$

$$\begin{cases} 2a-4=\lambda \\ 2b-4=\lambda \\ a=1-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-b)-4=\lambda \\ 2b-4=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b-2=\lambda \\ 2b-4=\lambda \end{cases}$$

$$\therefore \lambda = -3 \text{ 이므로, } b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2} \text{ 이 된다.}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \text{ 에서 최솟값 } z = \frac{17}{2} \text{ 을 가진다. ((b)와 동일)}$$

문제 4번

container 중의 기체 A, B가 가지는 엔트로피의 변화량을 각각 구한 후, 이를 더해 총 엔트로피의 변화량을 구한다.

(a):

$$dS = \frac{P}{T} \cdot dV \rightarrow \Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P}{T} dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR}{V} \cdot dV$$
$$= nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= R \ln\left(\frac{2V}{V}\right) = R \ln 2 \\ \Delta S_B &= R \ln\left(\frac{2V}{V}\right) = R \ln 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta S &= R \ln 2 + R \ln 2 \\ &= 2R \ln 2 \approx \underline{11.53 \text{ (J/K)}} \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= nR \ln\left(\frac{2V}{V}\right) = 2R \ln 2 \\ \Delta S_B &= R \ln\left(\frac{2V}{V}\right) = R \ln 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta S &= 2R \ln 2 + R \ln 2 \\ &= 3R \ln 2 \approx \underline{17.29 \text{ (J/K)}} \end{aligned}$$

(c) :

(a)에서는, B 기체가 A로 변화하면

양쪽 모두 동등한 조건을 가지게 된다.

$\therefore$ 칸막이를 제거해도 이들 간의 변화 및 혼합이 없으므로,

$$\underline{\Delta S = 0 \text{ 이다.}}$$

(b)에서는, B gas 두리에 들어간 A의 공간을 A'이라 할 때,

A에서의 압력: $2P$ 일때, A'에서의 압력은 P 이므로

칸막이 제거 후의 A와 A'의 압력은 $\frac{2}{3}P$ 로 동등해진다.

$$\therefore PV = nRT \rightarrow V = \frac{nRT}{P}$$

$$\therefore (A \text{의 부피}) = \frac{2nRT}{\frac{2}{3}P} = \frac{4}{3}V \text{ 일때, } (A' \text{의 부피}) = \frac{2}{3}V \text{ 이다.}$$

$$\therefore \Delta S_A = 2R \ln\left(\frac{\frac{4}{3}V}{V}\right) = 2R \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Delta S_B = R \ln\left(\frac{\frac{2}{3}V}{V}\right) = R \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \Delta S = R \ln\left(\frac{4}{3}\right)^2 + R \ln\left(\frac{2}{3}\right) = R \ln\left(\frac{32}{27}\right) \approx \underline{1.4 \text{ (J/K)}}$$